Zur Teilbarkeit von Fibonacci-Zahlen durch Primzahlen

Mit der Formel von Moivre-Binet ergibt sich durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} * \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] = \frac{1}{2^n * \sqrt{5}} * 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ ungerade}}}^{n} \binom{n}{i} \sqrt{5}^{\,i} = \frac{1}{2^{n-1}} * \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ ungerade}}}^{n} \binom{n}{i} 5^{\frac{i-1}{2}}$$

(Die Glieder mit geraden Werten für i heben sich auf, diejenigen mit ungeraden Werten treten in beiden Teiltermen gleichartig auf.)

Sei nun p prim und ungleich 5. Man erhält dann speziell:

$$f_p = \frac{1}{2^{p-1}} * \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ ungerade}}}^{p} \binom{p}{i} 5^{\frac{i-1}{2}} \quad \text{(I)} \qquad \text{sowie} \qquad f_{p+1} = \frac{1}{2^p} * \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ ungerade}}}^{p+1} \binom{p+1}{i} 5^{\frac{i-1}{2}} \quad \text{(II)}$$

In (I) sind alle Binomialkoeffizienten außer $\binom{p}{p}$ durch p teilbar, in (II) alle außer $\binom{p+1}{1}$ und $\binom{p+1}{p}$.

Es gilt daher unter Berücksichtung des kleinen Fermatschen Satzes:

$$f_p \equiv \frac{1}{2^{p-1}} * \binom{p}{p} * 5^{\frac{p-1}{2}} \equiv 5^{\frac{p-1}{2}} \pmod p \qquad \text{und}$$

$$f_{p+1} \equiv \frac{1}{2^p} * \left(\binom{p+1}{1} * 5^0 + \binom{p+1}{p} * 5^{\frac{p-1}{2}} \right) \equiv \frac{p+1}{2} * \left(1 + 5^{\frac{p-1}{2}} \right) \equiv \frac{1}{2} * \left(1 + 5^{\frac{p-1}{2}} \right) \pmod p$$

Differenzbildung liefert schließlich

$$f_{p-1} = f_{p+1} - f_p \equiv \frac{1}{2} * \left(1 - 5^{\frac{p-1}{2}} \right) \pmod p$$

Nun ist $5^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod p$, je nachdem ob 5 quadratischer Rest modulo p ist oder nicht.
Damit ergeben sich die folgenden Verhältnisse:

(mod p)	5 quadr. Rest	5 quadr. Nichtrest
$f_{p-1} \equiv$	0	+1
$f_p \equiv$	+1	-1
$f_{p+1} \equiv$	+1	0

Michael Hammer-Kruse
23.06.2011